Lógica

Más allá de las proposiciones

Damiano Zanardini

GRADUADO/A EN INGENIERÍA INFORMÁTICA
FACULTAD DE INFORMÁTICA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID
damiano@fi.upm.es

Curso Académico 2010/2011

Ejemplos interesantes de formalización

El fin de semana de Juan

Si este fin de semana nieva y Juan ha terminado el trabajo irá a esquiar
Nieva
Juan ha terminado el trabajo

Juan irá a esquiar

Ejemplos interesantes de formalización

El fin de semana de Juan

Si este fin de semana nieva y Juan ha terminado el trabajo irá a esquiar
Si este fin de semana nieva y Paco ha terminado el trabajo irá a esquiar
Nieva
Juan ha terminado el trabajo
Paco ha terminado el trabajo

Juan y Paco irán a esquiar

Ejemplos interesantes de formalización

El fin de semana de Juan

Si este fin de semana nieva, los que terminan su trabajo van a esquiar
Nieva
Juan ha terminado el trabajo
Paco ha terminado el trabajo
Nacho ha terminado el trabajo

Juan, Paco y Nacho irán a esquiar

Ejemplos interesantes de formalización

El fin de semana de Juan

Cada vez que nieva, los que terminan su trabajo van a esquiar
Nieva este fin de semana
Va a nevar el próximo fin de semana
Juan ha terminado el trabajo esta semana
Paco ha terminado el trabajo esta semana

Juan y Paco irán a esquiar este fin de semana y (si terminarán su trabajo) también el siguiente

Ejemplos interesantes de formalización

Un verdadero clásico

Si Sócrates es un hombre entonces Sócrates es mortal
Sócrates es un hombre

Sócrates es mortal

Ejemplos interesantes de formalización

Un verdadero clásico

Todos los hombres son mortales
Sócrates es un hombre

Sócrates es mortal

Ejemplos interesantes de formalización

¿Qué está pasando?

- las proposiciones se refieren a *individuos*
  - un empleado entre los de la empresa
  - un fin de semana del año
- a medida que vamos a tener que hablar de más de un individuo (para expresar un hecho más general) las cosas se complican y las proposiciones se nos quedan cortas
- podemos multiplicar las proposiciones, una para cada individuo y hecho lógico que se refiere a él, pero
  - esto lo haría todo mucho más largo y pesado
  - el uso de la lógica en las matemáticas require hablar de conjuntos infinitos (los números naturales, por lo menos)
- necesitamos entonces nuevas herramientas...

Las nuevas herramientas

Hablar de los individuos

- en lugar de representar un hecho lógico por medio de una proposición, donde el individuo está "empotrado"
  - p por "Juan ha terminado el trabajo"
- usamos predicados que aceptan un argumento
  - $\mathit{terminado}(\mathit{Juan})$, pero también $\mathit{terminado}(\mathit{Paco})$
- o dos, o más, para expresar *relaciones*
  - $\mathit{padre}(\mathit{Juan}, \mathit{Juanito}) \qquad \mathit{suma}(3, 5, 8)$
- y sobre todo aceptan variables
  - $\mathit{terminado}(x)$ donde x se ha de especificar en otro sitio

Las nuevas herramientas

Las variables

- usar una variable como en $\mathit{terminado}(x)$ tiene sentido sólo en un determinado contexto
- el contexto lo da el resto de la fórmula, y sobre todo los cuantificadores
  - $\forall x\ \mathit{terminado}(x)$ por "todo el mundo ha terminado el trabajo"
  - $\exists x\ \mathit{terminado}(x)$ por "hay alguien que ha terminado el trabajo"
- así nuestro lenguaje se vuelve mucho más expresivo: podemos expresar hechos lógicos generales
  - $\forall x(\mathit{hombre}(x) \rightarrow \mathit{mortal}(x))$
  - $\forall x \exists y(\mathit{mayor}(y, x))$
- pero hay que tener cuidado con algunas cosas...

Las nuevas herramientas

El dominio

$$\forall x(\mathit{hombre}(x) \to \mathit{mortal}(x))$$

- ¿de qué individuos estamos hablando?
- en principio, si la definición de *hombre* es correcta, podemos decir que estamos hablando de todos los individuos posibles
  - porque la condición de mortalidad sólo se aplica dentro de una implicación
- pero ¿qué pasaría si *hombre* fuera verdad también con ciertos personajes de comics?

El dominio

$$\forall x \exists y(mayor(y, x))$$

- incluso dando una "buena" definición de *mayor*, no está claro de cuáles números estamos hablando
    - los número naturales
    - los números reales
    - los números de 1 a 5

Las nuevas herramientas

Los mundos de la lógica

- en el mundo proposicional, dada una fórmula F y una valoración V, me pregunto si F es verdad en V
- es decir, si es verdad en todos los mundos donde
  - cada símbolo de predicado representa un hecho lógico; y
  - este hecho lógico es verdadero o falso según V
- ejemplo:
  - $V(p) = \mathbf{v}$, $V(q) = \mathbf{f}$, $V(r) = \mathbf{f}$
  - le corresponde el mundo real en 2010, donde
  - p por "el Barcelona ha ganado la última Liga"
  - q por "el Madrid ha ganado la última Liga"
  - r por "el Madrid ha ido a celebrar a Cibeles"

Las nuevas herramientas

Los mundos de la lógica

- en nuestro nuevo lenguaje, tengo que especificar:
  - el significado de los símbolos, como antes; pero también
  - el significado de ciertos nuevos símbolos (los argumentos de los predicados, por ejemplo); y
  - los individuos a los que refiero (el dominio)
- si digo que el dominio son los números naturales y que *mayor* es lo que nos esperamos que sea, entonces

$$\forall x \exists y (mayor(y, x))$$

  es verdad
- es decir, dada una interpretación de una fórmula, me pregunto si es verdad en el mundo que corresponde a la interpretación

Las nuevas herramientas

Resumen

- hemos hablado de
  - predicados
  - variables
  - cuantificadores
  - dominios
  - interpretaciones
- y nos quedan las funciones
- pero es mejor que paremos y que se ponga un poco de orden

Un ejemplo más complicado

Si un abuelo no trabaja lleva a todos sus nietos al colegio

Todo el mundo se jubila al cumplir 65 años

Uno entre mi padre y mi suegro tiene 67 años

El padre del padre y el padre de la madre son abuelos

Tendré que llevar a mis hijos al colegio si y sólo si nadie les lleva

---

No tengo que llevar a mis hijos al colegio

Un ejemplo más complicado

Si un abuelo no trabaja lleva a todos sus nietos al colegio

$$\forall x(\neg trabaja(x) \to \forall y(abuelo(x,y) \to lleva(x,y)))$$

Todo el mundo se jubila al cumplir 65 años

$$\forall x(cumplido(x,65) \to \neg trabaja(x))$$

Uno entre mi padre y mi suegro tiene 67 años

$$\exists x((padre(x,d) \vee suegro(x,d)) \wedge cumplido(x,67))$$

El padre del padre y el padre de la madre son abuelos

$$\forall x \forall y \forall z(padre(x,y) \wedge (padre(y,z) \vee madre(y,z)) \to abuelo(x,z)$$

Tendré que llevar a mis hijos al colegio si y sólo si nadie les lleva

$$\forall x(padre(d,x) \wedge \neg\exists y(lleva(y,x) \wedge y \neq d) \leftrightarrow lleva(d,x))$$

No tengo que llevar a mis hijos al colegio

$$\forall x(padre(d,x) \to \neg lleva(d,x))$$

Un ejemplo más complicado

$$\forall x \forall y (suegro(x,y) \leftrightarrow \exists z (casado(y,z) \wedge padre(x,z)))$$
$$\forall x \forall y \forall z (madre(x,z) \leftrightarrow casado(x,y) \wedge padre(y,z))$$
$$\forall x \forall y \forall z (padre(x,z) \leftrightarrow casado(x,y) \wedge madre(y,z))$$
$$\forall x \forall y (casado(x,y) \leftrightarrow casado(y,x))$$
$$\forall x \forall y \forall z (cumplido(x,y) \wedge mayorigual(y,z) \rightarrow cumplido(x,z))$$
$$mayorigual(67,65)$$